

**Задача Д1. (Рис.Д1.8, номер условия 5)**

<http://www.termeh.ru>

Груз  $D$  массой  $m = 4.5 \text{ кг}$ , получив в точке  $A$  начальную скорость  $V_0 = 22 \text{ м/с}$ , движется в изогнутой трубе  $ABC$ , расположенной в вертикальной плоскости. Труба имеет два участка: первый является наклонным, а второй – горизонтальным (см. рис. Д1.8). На участке  $AB$  на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила  $\vec{Q}$  ( $Q = 9 \text{ Н}$ , её направление показано на рисунке) и сила сопротивления среды  $\vec{R}$  ( $R = 0.5 \cdot V$ ), зависящая от скорости  $\vec{V}$  груза (направлена против движения).

В точке  $B$  груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок  $BC$  трубы, где на него кроме силы тяжести действует переменная сила  $\vec{F}$ , проекция которой  $F_x$  на ось  $x$  определяется выражением:  $F_x = 3t$ .

Считая груз материальной точкой и зная время движения тела  $D$  от точки  $A$  до точки  $B$   $t_1 = 3 \text{ с}$ , найти закон движения груза на участке  $BC$ , т. е.  $x = f(t)$ , где  $x = BD$ .

Трением груза о трубу пренебречь.

Дано:  $m = 4.5 \text{ кг}$ ,  $V_0 = 22 \text{ м/с}$ ,  $Q = 9 \text{ Н}$ ,  $R = \mu \cdot V$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $t_1 = 3 \text{ с}$ ,  $F_x = 3t$ .

Определить:  $x = f(t)$  – закон движения груза на участке  $BC$ .

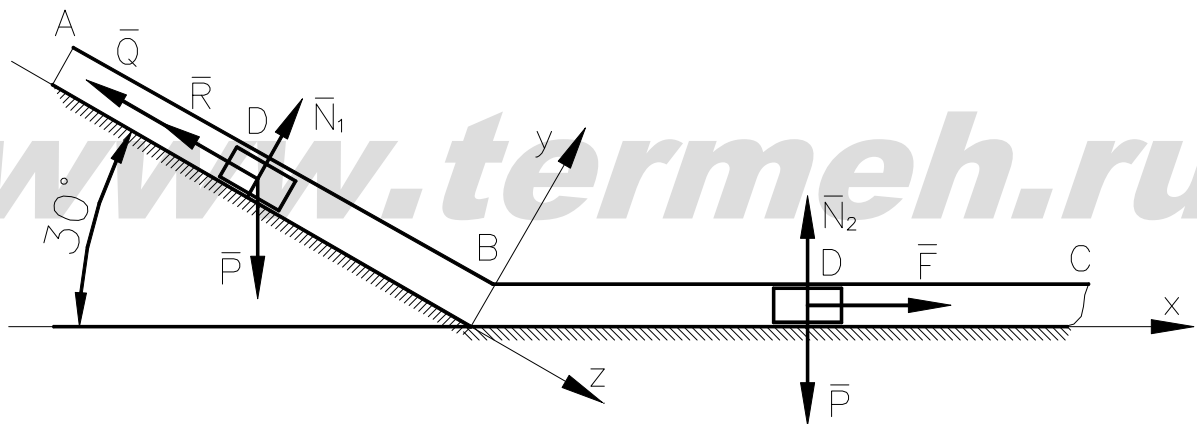


Рис. Д.1.8

**Решение.**

1. Рассмотрим движение груза  $D$  на участке  $AB$ , считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{N}_1$  и  $\vec{Q}$ . Проводим ось  $Az$  и составляем дифференциальное уравнение движения груза

в проекции на эту ось:  $m \frac{dV_z}{dt} = \Sigma F_{kz}$  или  $m \frac{dV_z}{dt} = P_z + R_z + N_{1z} + Q_z$ . (1)

Далее находим  $P_z = P \sin 30^\circ = mg \sin 30^\circ$ ,  $R_z = -R = -\mu \cdot V$ ,  $N_{1z} = 0$ ;  $Q_z = -Q$ ; здесь все переменные силы выразили через величины, от которых они зависят.

Учитывая еще, что  $V_z = V$ , получим

$$m \frac{dV}{dt} = mg \sin 30^\circ - \mu \cdot V - Q \quad \text{или} \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{\mu}{m} \cdot \left( V - \frac{0.5mg - Q}{\mu} \right). \quad (2)$$

Введём для сокращения записей обозначение

$$n = \frac{0.5mg - Q}{\mu} = \frac{0.5 \cdot 4.5 \cdot 9.81 - 9}{0.5} \approx 26.145 \frac{м}{с}. \quad (3)$$

Тогда разделяя в уравнении (2) переменные и взяв затем от обеих частей полученного равенства интегралы, получим

$$\frac{dV}{V-n} = -\frac{\mu}{m} dt \Rightarrow \ln|V-n| - \ln C_1 = -\frac{\mu}{m} t \Rightarrow \ln \left| \frac{V-n}{C_1} \right| = -\frac{\mu}{m} t. \quad (4)$$

По начальным условиям в задаче, при  $t=0$  имеем  $V=V_0=22 м/с$ , что даёт значение постоянной интегрирования  $\ln \left| \frac{V_0-n}{C_1} \right| = 0 \Rightarrow C_1 = V_0 - n = 22 - 26.145 = -4.145 м/с$ .

Введём ещё обозначения:  $k = \frac{\mu}{m} = \frac{0.5}{4.5} \approx 0.1111 с^{-1}$ ; (5)

Далее из равенств (4) и (5) находим скорость груза D на участке АВ как функцию времени

$$\ln \left| \frac{V-n}{C_1} \right| = -kt, \text{ отсюда следует } V = n + C_1 e^{-kt} \quad (6)$$

или далее вычислим правую часть этого равенства при  $t=t_1=3с$ , то есть скорость тела D в точке В определяется выражением:  $V_B = n + C_1 e^{-kt_1}$ , вычислим данную скорость.

$$V_B = 26.145 - 4.145 \cdot e^{-0.1111 \cdot 3} \approx 23.175 м/с. \quad (6)$$

2. Рассмотрим движение груза на участке ВС; найденная скорость  $V_B$  будет для движения на этом участке начальной скоростью ( $V_0 = V_B$ ). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,  $\vec{N}_2$  и  $\vec{F}$ . Проведём из точки В ось  $Bx$  и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось  $Bx$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} = F_x \quad \text{или} \quad 4.5 \cdot \frac{dV_x}{dt} = 3t \Rightarrow \frac{dV_x}{dt} = 0.6667t \quad (7)$$

Интегрируем выражение (7) и получаем

$$V_x = 0.3333t^2 + C_2. \quad (8)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз D находится в точке В, считая в этот момент  $t=0$ . Тогда при  $t=0$  имеем  $V=V_0=V_B$ , где  $V_B$  даётся равенством (6), из (8) находим  $C_2 = V_B = 23.175 м/с$ . Выражение (8) примет вид:  $V_x = 0.3333t^2 + 23.175$

или  $\frac{dx}{dt} = 0.3333t^2 + 23.175 \Rightarrow dx = (0.3333t^2 + 23.175)dt.$  (9)

Интегрируем далее (9) и получаем зависимость

$$x = 0.1111t^3 + 23.175t + C_3.$$

Так как при  $t=0$  имеем  $x=0$ , то  $C_3=0$  и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 0.1111t^3 + 23.175t, \quad (10)$$

где  $x$  – в метрах,  $t$  – в секундах.