Задача Д8. **(Рис.Д8.1, номер условия 4)** http://www.termeh.ru

Вертикальный вал AK (рис. Д8.1), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10c^{-1}$, закреплён подпятником в точке А и цилиндрическим подшипником в точке K ($AB = BD = DE = EK = a = 0.6м$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10кг$, состоящий из частей 1 и 2 (размеры частей показаны на рисунках, где $b = 0.1м$, а их массы m_1 и m_2 пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $\ell = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3кг$ на конце; оба стержня лежат в одной плоскости, D и E – точки крепления стержней, а углы равны $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\varphi = 60^\circ$.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника.

Дано: $\omega = 10c^{-1}$, $a = 0.6м$, $b = 0.1м$, $\ell = 4b$, $m = 10кг$, $m_3 = 3кг$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\varphi = 30^\circ$.

Найти: R_A, R_K.

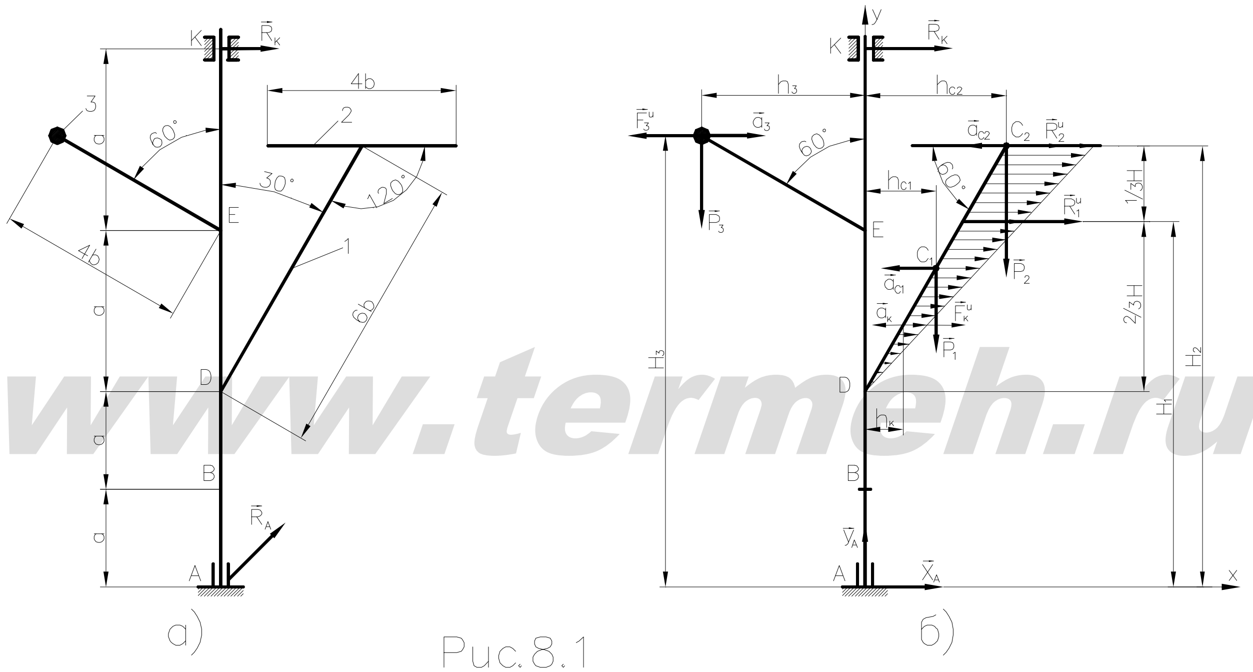

Рис.8.1

Решение

1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках D и E стержни (рис.Д8.1а). Массы и веса частей 1 и 2 ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0.6m$; $m_2 = 0.4m$;

$$P_1 = 0.6mg = 0.6 \cdot 10 \cdot 9.81 \approx 58.86H; \quad P_2 = 0.4mg = 0.4 \cdot 10 \cdot 9.81 \approx 39.24H;$$

$$P_3 = m_3 g = 3 \cdot 9.81 \approx 29.43H. \qquad (1)$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом координатные оси Axy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy, и изобразим действующие на систему силы: активные силы – силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ и реакции связей – составляющие реакции подпятника $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\vec{R}_K$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\vec{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где h_k – расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\vec{F}_k^u$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^u = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, Δm_k – масса элемента. Так как все F_k^u пропорциональны h_k, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части 1 треугольник, а для части 2 – все силы инерции на одной прямой (рис.Д8.1б).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^u = ma_C$, где m – масса тела, a_C – ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^u = m_1 a_{C1}, \qquad R_2^u = m_2 a_{C2}. \qquad (2)$$

Сила инерции точечной массы 3 должна быть направлена в сторону, противоположную её ускорению и численно будет равна $F_3^u = m_3 a_3$. (3)

Ускорения центров масс частей 1 и 2 стержня и груза 3 равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}, \qquad a_{C2} = \omega^2 h_{C2}, \qquad a_3 = \omega^2 h_3, \qquad (4)$$

где h_{C1}, h_{C2} – расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а h_3 – соответствующее расстояние груза:

$$h_{C1} = 3b\sin 30^\circ = 0.15м, \quad h_{C2} = 6b\sin 30^\circ = 0.3м, \quad h_3 = \ell\sin 60^\circ = 4b\sin 60^\circ \approx 0.346м. \qquad (5)$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения R_1^u, R_2^u и F_3^u:

$$R_1^u = 0.6m\omega^2 h_{C1} = 0.6\cdot 10\cdot 10^2\cdot 0.15 = 90H, \quad R_2^u = 0.4m\omega^2 h_{C2} = 0.4\cdot 10\cdot 10^2\cdot 0.3 = 120H,$$

$$F_3^u = m_3\omega^2 h_3 = 3\cdot 10^2\cdot 0.346 \approx 103.92H \qquad (6)$$

При этом линии действия равнодействующих $\vec{R}_1^u$ и $\vec{R}_2^u$ пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия действия $\vec{R}_1^u$ проходит на расстоянии $(2/3)H$ от вершины треугольника ΔDC_2I, где $H = 6b\cos 30^\circ = 6\cdot 0.1\cdot 0.866 \approx 0.520м.$

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\Sigma F_{kx} = 0; \qquad X_A + R_K + R_1^u + R_2^u - F_3^u = 0; \qquad (7)$$

$$\Sigma F_{ky} = 0; \qquad Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0; \qquad (8)$$

$$\Sigma m_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -R_K\cdot 4a - P_1\cdot h_{C1} - P_2\cdot h_{C2} + P_3\cdot h_3 - R_1^u\cdot H_1 - R_2^u\cdot H_2 + F_3^u\cdot H_3 = 0, \qquad (9)$$

где H_1, H_2, H_3 – плечи сил $\vec{R}_1^u$, $\vec{R}_2^u$, $\vec{F}_3^u$ относительно точки А, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30^\circ = 0.52м$):

$$H_1 = 2a + \frac{2}{3}H = 2\cdot 0.6 + \frac{2}{3}\cdot 0.52 \approx 1.546м, \qquad H_2 = 2a + H = 2\cdot 0.6 + 0.520 \approx 1.720м,$$

$$H_3 = 3a + \ell\cos 60^\circ = 3\cdot 0.6 + 4\cdot 0.1\cdot 0.5 = 2.0м. \qquad (10)$$

Подставив в уравнения (7) – (9) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (10) и решив эту систему уравнений, найдем искомые реакции.

Из уравнения (9) определим реакцию подшипника R_K:

$$R_K = (-P_1\cdot h_{C1} - P_2\cdot h_{C2} + P_3\cdot h_3 - R_1^u\cdot H_1 - R_2^u\cdot H_2 + F_3^u\cdot H_3)\frac{1}{4a} =$$

$$R_K = \frac{-58.86\cdot 0.15 - 39.24\cdot 0.3 + 29.43\cdot 0.346 - 90\cdot 1.546 - 120\cdot 1.72 + 103.92\cdot 2.0}{4\cdot 0.6} \approx -61.69H.$$

Знак минус означает, что реакция направлена противоположно показанной на рисунке.

Из уравнения (8) определим составляющую реакции подпятника Y_A :

$Y_A = P_1 + P_2 + P_3 = 58.86 + 39.24 + 29.43 = 127.53H$;

Из уравнения (7) определим составляющую реакции подпятника X_A :

$X_A = -R_K - R_1^u - R_2^u + F_3^u = -(-61.69) - 90 - 120 + 103.92 \approx -44.38H$;

Знак минус означает, что реакция направлена противоположно показанной на рисунке.

Полная реакция в подпятнике $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-44.38)^2 + 127.53^2} \approx 135.03H$.

Ответ: $R_A = 135H$, $R_K = 61.7H$.