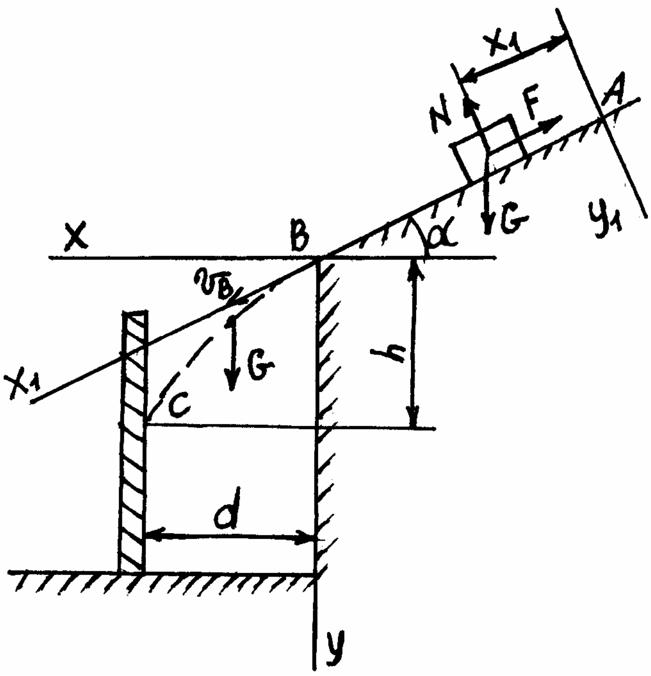
Д.1- 17 вариант

Камень скользит в течении τ сек. по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину ℓ. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения по откосу равен f. Имея в точке B скорость υ_B , камень через τ сек. ударяется в точке C о вертикальную защитную стенку. Принять камень за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.



Дано: $\alpha = 45^\circ$; $\ell = 6м.$; $\upsilon_B = 2\upsilon_A$; $\tau = 1сек.$; $h = 6м.$

Определить: d и f.

Решение:

1. Рассмотрим движение камня на участке AB.

Принимая камень за материальную точку, показываем действующие на него силы: вес G, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}$. Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB.

$m \cdot \ddot{x}_1 = \sum x_{i1}$; $m \cdot \ddot{x}_1 = G \cdot \sin\alpha - F$, но F=fN , где N=G$\cos\alpha$.

Таким образом , $m \cdot \ddot{x}_1 = G \cdot \sin\alpha - f \cdot G \cdot \cos\alpha$ или $\ddot{x}_1 = g \cdot \sin\alpha - f \cdot g \cdot \cos\alpha$. Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем:

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \cdot t + C_1;$$

$$x_1 = [g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)/2] \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_2 .$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0, x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = \upsilon_A = 0{,}5\upsilon_B$;

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для t=0:

$$\dot{x}_{10} = C_1; \; x_{10} = C_2 .$$

Найдем постоянные : $C_1 = \upsilon_A$; $C_2 = 0$. Тогда :

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \cdot t + \upsilon_A$$

$$x_1 = \frac{g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)}{2} \cdot t^2 + \upsilon_A \cdot t$$

Для момента τ, когда камень покидает участок, $\dot{x}_1 = \upsilon_B$; $x_1 = \ell$, т.е.

$$\upsilon_B = g\cdot(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\cdot\tau + \upsilon_A (1)$$

$$\ell = \frac{g\cdot(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)}{2}\cdot\tau^2 + \upsilon_A\cdot\tau (2)$$

Уравнение (2) можно записать в виде: $2\ell = (\upsilon_B + \upsilon_A)\cdot\tau$ и, с учетом $\upsilon_A = 0{,}5\upsilon_B$, $2\ell = (\upsilon_B + 0{,}5\upsilon_B)\cdot\tau$; $2\ell = 1{,}5\upsilon_B\cdot\tau$. Отсюда $\upsilon_B = \frac{2\ell}{1{,}5\cdot\tau} = \frac{2\cdot 6}{1{,}5\cdot 1} = 8\,м/с$;

Уравнение (1) запишем в виде: $\upsilon_B = g\cdot(\sin\alpha - f\cdot\cos\alpha)\cdot 1 + 0{,}5\upsilon_B$ или $0{,}5\upsilon_B = 9{,}81\cdot(\sin 45^\circ - f\cdot\cos 45^\circ) = 9{,}81\cdot(0{,}707 - f\cdot 0{,}707) = 6{,}94 - 6{,}94f$;

$0{,}5\cdot 8 = 6{,}94 - 6{,}94f$; $4 = 6{,}94 - 6{,}94f$; $6{,}94f = 2{,}94; \Rightarrow f = 0{,}424$

2. Рассмотрим движение камня от точки В до точки С.

Составим дифференциальное уравнение его движения: $m\cdot\ddot{x} = 0$; $m\cdot\ddot{y} = G$ или $\ddot{y} = g$.

Начальные условия задачи при t=0:

$$x_\circ = 0; \quad y_\circ = 0;$$

$$\dot{x}_\circ = \upsilon_B\cdot\cos\alpha; \quad \dot{y}_\circ = \upsilon_B\cdot\sin\alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = g\cdot t + C_4;$$

$$x = C_3\cdot t + C_5; \quad y = g\cdot t^2/2 + C_4\cdot t + C_6$$

Напишем полученные уравнения для t=0:

$$\dot{x}_\circ = C_3; \quad \dot{y}_\circ = C_4;$$

$$x_\circ = C_5; \quad y_\circ = C_6$$

Отсюда найдем, что $C_3 = \upsilon_B\cdot\cos\alpha$; $C_4 = \upsilon_B\cdot\sin\alpha$; $C_5 = 0$; $C_6 = 0$.

Получим следующее уравнение проекций скоростей камня:

$\dot{x} = \upsilon_B\cdot\cos\alpha$; $\dot{y} = g\cdot t + \upsilon_B\cdot\sin\alpha$ и уравнения его движения:

$x = \upsilon_B\cdot\cos\alpha\cdot t$; $y = \frac{g\cdot t^2}{2} + \upsilon_B\cdot\sin\alpha\cdot t$.

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = \frac{g\cdot x^2}{2\cdot\upsilon_B^2\cdot\cos\alpha} + x\cdot tg\alpha (3)$$

В момент касания защитной стенки y=h=6м. , x=d.

$6 = \frac{9{,}81\cdot d^2}{2\cdot 8^2\cdot\cos^2\alpha} + d\cdot tg 45^\circ$; $6 = \frac{9{,}81\cdot d^2}{2\cdot 64\cdot 0{,}50} + d\cdot 1$; $6 = 0{,}153\cdot d^2 + d$; $0{,}153\cdot d^2 + d - 6$.

Находим корни квадратного уравнения:

$$d=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 0{,}153\cdot 6}}{2\cdot 0{,}153}=\frac{-1\pm\sqrt{1+3{,}67}}{0{,}306}=\frac{-1\pm 2{,}16}{0{,}306}$$; d=3,79

Ответ:

d=3,79м; f=0,424.