Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

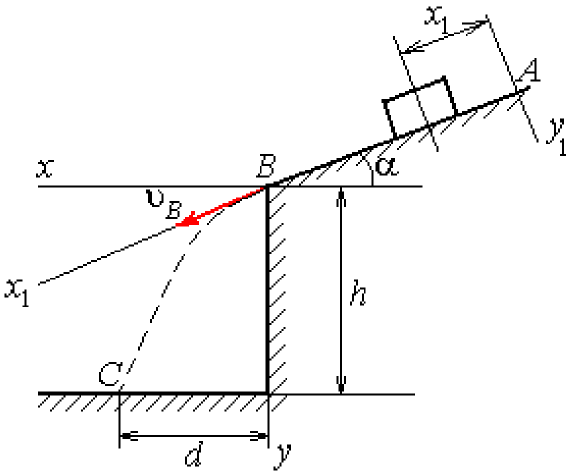
Вариант 23

Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость υ_A. Коэффициент трения скольжения равен f. Через τ с тело в точке B со скоростью υ_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью υ_C; при этом оно находится в воздухе T с.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

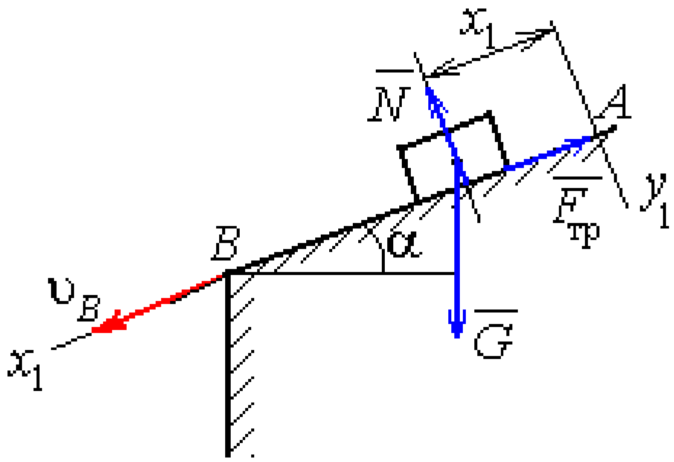
Исходные данные: схема 5, $f = 0$; $\upsilon_A = 0$; $l = 9{,}81$ м; $\tau = 2$ с; $h = 20$ м.

Определить: α и T.



Решение:

Рассмотрим движение тела на участке AB. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$.



Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке AB:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1} \Rightarrow m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = fN = 0$, так как $f = 0$ по условию задачи. Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G\sin\alpha,$$

а так как $G = mg$, то $\ddot{x}_1 = g\sin\alpha$.

Интегрируя это дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = gt\sin\alpha + C_1;$$

$$x_1 = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ (начальное положение совпадает с началом координат – точка A) и $\dot{x}_{10} = 0$ (начальная скорость на этом участке равна нулю, по условию задачи $\upsilon_A = 0$).

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t = 0$:

$$\dot{x}_{10} = g \cdot 0 \cdot \sin\alpha + C_1 \Rightarrow C_1 = \dot{x}_{10} = 0;$$

$$x_{10} = \frac{g \cdot 0^2}{2}\sin\alpha + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_{10} = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = gt\sin\alpha;$$

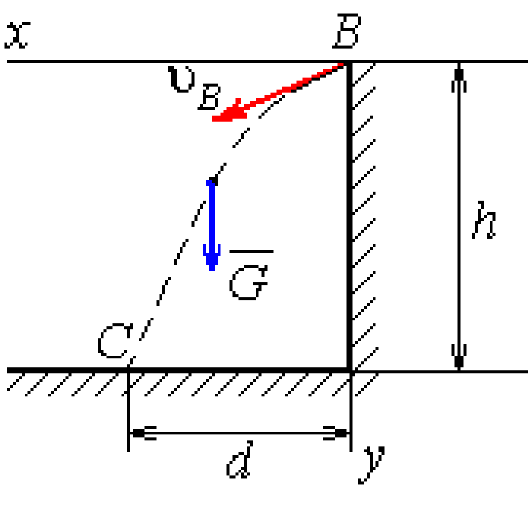
$$x_1 = \frac{gt^2}{2}\sin\alpha.$$

Для момента $\tau = 2$ с, когда тело покидает участок AB, $\dot{x}_{1\tau} = \upsilon_B$; $x_{1\tau} = l = 9{,}81$ м; то есть

$$l = \frac{g\tau^2}{2}\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2l}{g\tau^2} = \frac{2 \cdot 9{,}81}{9{,}81 \cdot 2^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°;$$

$$\upsilon_B = g\tau\sin\alpha = 9{,}81 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 9{,}81 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим движение тела от точки B до точки C.



Составим дифференциальные уравнения движения тела на участке BC:

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = G \Rightarrow \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = g.$$

Начальные условия задачи на этом участке:

при $t = 0$: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = \upsilon_B\cos\alpha$; $\dot{y}_0 = \upsilon_B\sin\alpha$.

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3;\ \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5;\ y = \frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3 \Rightarrow C_3 = \dot{x}_0 = \upsilon_B\cos\alpha;\ \dot{y}_0 = g \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = \dot{y}_0 = \upsilon_B\sin\alpha;$$

$$x_0 = C_3 \cdot 0 + C_5 \Rightarrow C_5 = x_0 = 0;\ y_0 = \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_4 \cdot 0 + C_6 \Rightarrow C_6 = y_0 = 0.$$

В результате получим следующие уравнения проекций скоростей тела:

$$\dot{x} = v_B \cos\alpha\,;\ \dot{y} = gt + v_B \sin\alpha$$

и уравнения его движения на участке BC

$$x = v_B t \cos\alpha\,;\ y = \frac{gt^2}{2} + v_B t \sin\alpha.$$

Так как за время падения тело находилось в воздухе T с и пролетело при этом по вертикали $h = 20$ м, то из второго уравнения движения найдем время полета тела:

$$h = \frac{gT^2}{2} + v_B T \sin\alpha \Rightarrow 20 = \frac{9{,}81 \cdot T^2}{2} + 9{,}81 \cdot T \cdot 0{,}5 \Rightarrow 4{,}905T^2 + 4{,}905T - 20 = 0$$
$$\Rightarrow T_{1,2} = \frac{-4{,}905 \pm \sqrt{4{,}905^2 - 4 \cdot 4{,}905 \cdot (-20)}}{2 \cdot 4{,}905} = -0{,}5 \pm 2{,}08 \Rightarrow T_1 = -2{,}58;\ T_2 = 1{,}58$$

Так как время отрицательным быть не может, то $T = 1{,}58$ с.

<u>Ответ:</u> $\alpha = 30°$; $T = 1{,}58$ с.