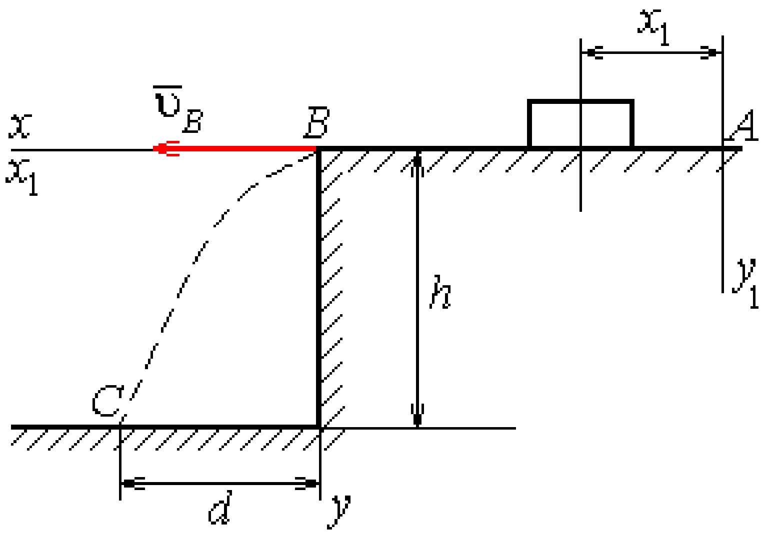
Задание Д.1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Вариант 28

Имея в точке A скорость υ_A, тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f. Со скоростью υ_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью υ_C, находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

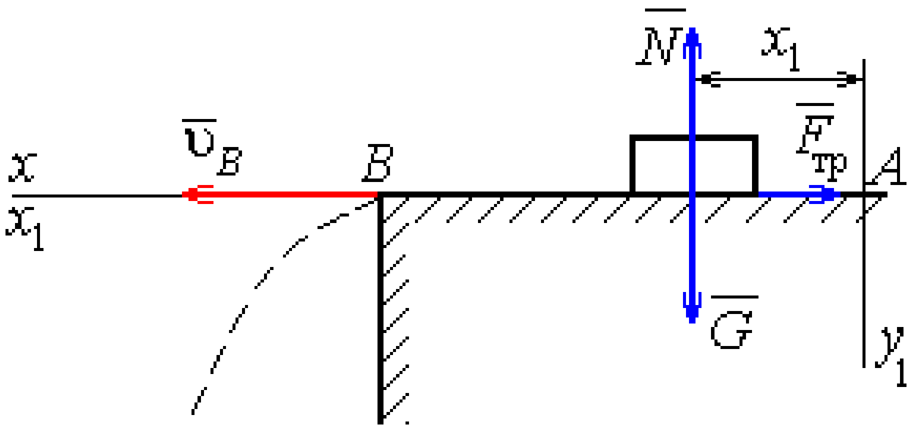
Исходные данные: схема 6, $\upsilon_B = 3$ м/с; $f = 0{,}3$; $l = 3$ м; $h = 5$ м.

Определить: υ_A и T.



Решение:

Рассмотрим движение тела на участке AB. Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес $\vec{G}$, нормальную реакцию $\vec{N}$ и силу трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$.



Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке AB:

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_{i1} \Rightarrow m\ddot{x}_1 = -F_{\text{тр}}.$$

Сила трения $F_{\text{тр}} = fN = fG$, так как $N = G$ из дифференциального уравнения движения тела на ось y. Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = -fG,$$

а так как $G = mg$, то $\ddot{x}_1 = -fg$.

Интегрируя это дифференциальное уравнение дважды, получаем

$$\dot{x}_1 = -fgt + C_1;$$

$$x_1 = -\frac{fgt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянной интегрирования C_2 воспользуемся начальным условием задачи: при $t = 0$ $x_{10} = 0$ (начальное положение совпадает с началом координат – точка A):

$$x_{10} = -\frac{0{,}3 \cdot g \cdot 0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_{10} = 0.$$

Для определения постоянной интегрирования C_1 воспользуемся граничным условием задачи: для момента τ с, когда тело покидает участок AB, $\dot{x}_{1\tau} = \upsilon_B$; $x_{1\tau} = l = 3$ м; то есть

$$\upsilon_B = -fg\tau + C_1 \Rightarrow C_1 = \upsilon_B + fg\tau = 3 + 0{,}3g\tau$$

$$l = -\frac{fg\tau^2}{2} + C_1\tau = -\frac{0{,}3g\tau^2}{2} + (3 + 0{,}3g\tau)\tau = 3\tau + \frac{0{,}3g\tau^2}{2},$$

то есть $3\tau + \frac{0{,}3g\tau^2}{2} = 3 \Rightarrow \tau^2 + \frac{20}{g}\tau - \frac{20}{g} = 0 \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{20}{g} + \sqrt{\left(\frac{20}{g}\right)^2 + 4 \cdot \frac{20}{g}}\right) = 0{,}735$ с;

$\tau_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{20}{g} - \sqrt{\left(\frac{20}{g}\right)^2 + 4 \cdot \frac{20}{g}}\right) = -2{,}774$ с (при расчете учитывали, что $g = 9{,}81$ м/с^2).

Так как время отрицательным быть не может, то $\tau = 0{,}735$ с $\Rightarrow C_1 = 3 + 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}735 = 5{,}16$.

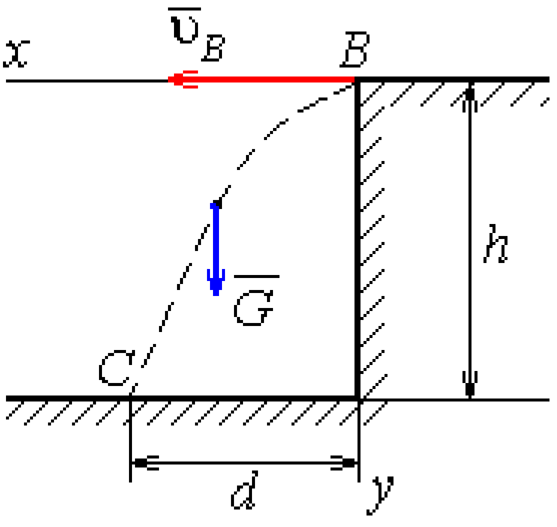
Таким образом, получили на участке AB:

$$\dot{x}_1 = -fgt + 5{,}16;$$

$$x_1 = -\frac{fgt^2}{2} + 5{,}16t.$$

Найдем начальную скорость на этом участке: при $t = 0$ $\dot{x}_{10} = \upsilon_A = -fg \cdot 0 + 5{,}16 \Rightarrow \upsilon_A = 5{,}16$ м/с.

Рассмотрим движение тела от точки B до точки C.



Составим дифференциальные уравнения движения тела на участке BC:

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = G \Rightarrow \ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = g.$$

Начальные условия задачи на этом участке:

при $t = 0$: $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $\dot{x}_0 = \upsilon_B$; $\dot{y}_0 = 0$.

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\dot{x} = C_3;\ \dot{y} = gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5;\ y = \frac{gt^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Напишем полученные уравнения для $t = 0$:

$$\dot{x}_0 = C_3 \Rightarrow C_3 = \dot{x}_0 = v_B;\ \dot{y}_0 = g \cdot 0 + C_4 \Rightarrow C_4 = \dot{y}_0 = 0;$$

$$x_0 = C_3 \cdot 0 + C_5 \Rightarrow C_5 = x_0 = 0;\ y_0 = \frac{g \cdot 0^2}{2} + C_4 \cdot 0 + C_6 \Rightarrow C_6 = y_0 = 0.$$

В результате получим следующие уравнения проекций скоростей тела:

$$\dot{x} = v_B;\ \dot{y} = gt$$

и уравнения его движения на участке BC

$$x = v_B t;\ y = \frac{gt^2}{2}.$$

Так как за время падения тело находилось в воздухе T с и пролетело при этом по вертикали $h = 5$ м, то из второго уравнения движения найдем время полета тела:

$$h = \frac{gT^2}{2} \Rightarrow 5 = \frac{9{,}81 \cdot T^2}{2} \Rightarrow T \approx 1 \text{ с}.$$

<u>Ответ</u>: $v_A = 5{,}16$ м/с; $T \approx 1$ с.