Тело H массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω_0; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A, отсчитываемом вдоль желоба, находится материальная точка K массой m_2. В некоторый момент времени ($t = 0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_z = M_z(t)$. При $t = \tau$ действие сил прекращается.

Определить угловую скорость ω_τ тела H в момент $t = \tau$.

Тело H вращается по инерции с угловой скоростью ω_τ.

В некоторый момент времени $t_1 = 0$ (t_1 – новое начало отсчета времени) точка K (самоходный механизм) начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону $OK = s = s(t_1)$.

Определить угловую скорость ω_T тела H при $t_1 = T$.

Тело H рассматривать как однородную пластинку, имеющую форму прямоугольника, показанную на рис.1.

Дано: $m_1 = 300\ кг,\ m_2 = 50\ кг,\ \omega_0 = -2\ рад/c,\ a = 1.6\ м,\ b = 1\ м,\ R = 0.8\ м,\ AO = 0,$

$M_z = 968\ Нм,\ \tau = 1c,\ OK = s = s(t_1) = 0.5\pi R t_1^2,\ \ T = 1\ c.$

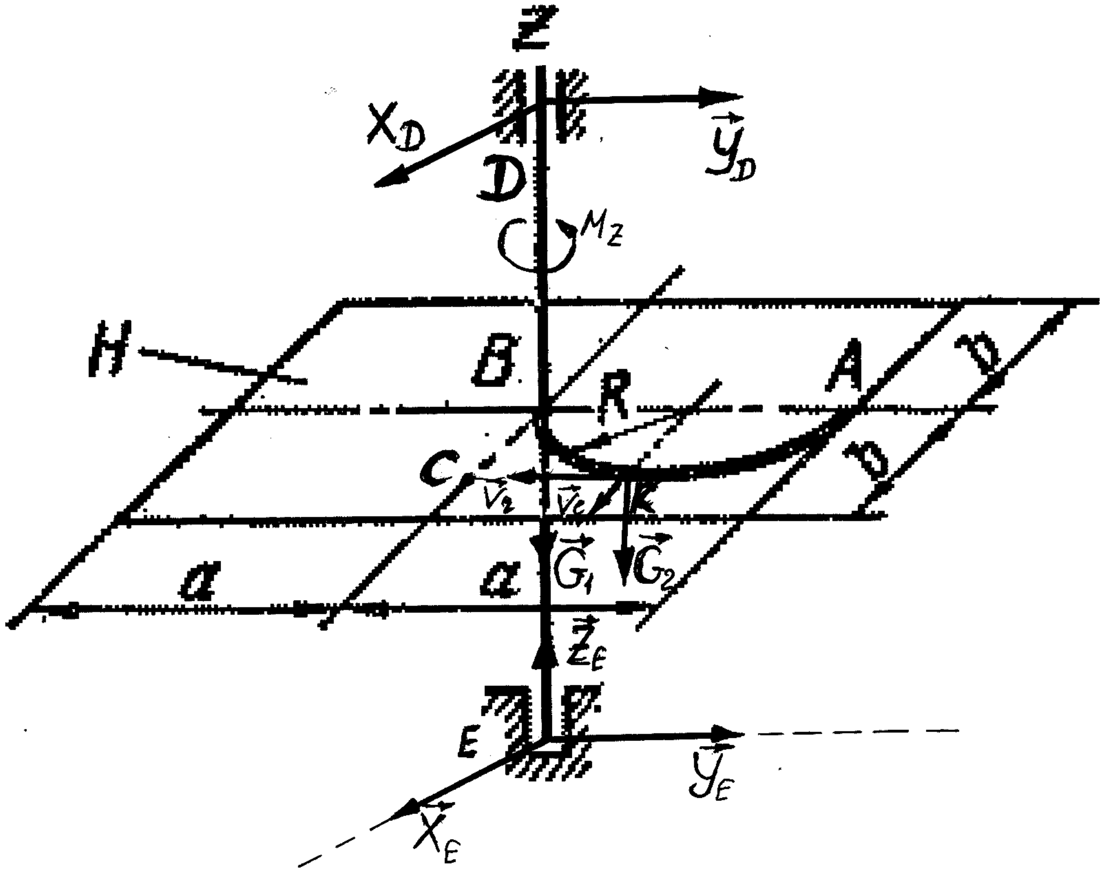

Рис.1

Решение http://www.termeh.ru

К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы, выраженную уравнением

$$\frac{dL_z}{dt}=\sum M_{iz}^E,$$

где L_z – кинетический момент системы, состоящей в данном случае из тела H и точки K, относительно оси z; $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ – главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси z.

На систему за время от $t = 0$ до $t=\tau$ действуют силы: вес $\vec{G}_1$ тела H, вес $\vec{G}_2$ точки K, пара сил с моментом M_z и реакции подпятника и подшипника (рис. 1).

Предположим, что вращение тела H происходит против вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси z; будем считать это направление положительным при определении знаков кинетических моментов.

Найдем выражение кинетического момента L_z системы, который складывается из кинетического момента тела $J_z\omega$ и момента количества движения точки K, находящейся в точке O тела H и имеющей скорость $V=\omega\cdot BO$: $\quad m_2V\cdot O_1O=m_2\omega\cdot BO^2.$

Таким образом, $\quad L_z=J_z\omega+m_2\omega\cdot BO^2=(J_z+m_2\cdot BO^2)\omega.$

Главный момент внешних сил равен вращающему моменту M_z, так как другие силы момента относительно оси z не создают.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента, примет вид

$$\frac{d((J_z+m_2\cdot BO^2)\omega)}{dt}L_z=M_z, \tag{1}$$

где $\quad M_z=const.$

Разделим в уравнении (1) переменные и проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$(J_z+m_2\cdot BO^2)\int_{\omega_0}^{\omega_\tau}d\omega=\int_0^\tau M_z dt.$$

Тогда $\quad (J_z+m_2\cdot BO^2)(\omega_\tau-\omega_0)=M_z\tau.$ (2)

Найдем числовые значения входящих в уравнение (2) величин.

Момент инерции тела H (прямоугольной пластины) относительно оси z, проходящей через её центр равен

$$J_z=\frac{1}{3}m_1(a^2+b^2)=\frac{1}{3}\cdot 300\cdot(1.6^2+1^2)=356\ кг\cdot м^2.$$

Из чертежа (рис.1) находим $\quad BO=BA=a=1.6\ м,$ так как $AO=0.$

Поэтому $\quad J_z+m_2\cdot BO^2=356+50\cdot 1.6^2=484\ кг\cdot м^2.$

Таким образом, из уравнения (2)

$$484\cdot(\omega_\tau-(-2))=968\cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_\tau=\frac{968}{484}-2=0.$$

После прекращения действия момента M_z тело H вращается по инерции с угловой скоростью; при этом к системе приложены силы G_1 и G_2, реакции подпятника и подшипника (рис.1).

Те же внешние силы действуют на систему и в течение промежутка времени от $t_1 = 0$ до $t_1 = T$ при движении самоходной тележки.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента системы, имеет для этого периода времени вид $\frac{dL_z}{dt}=0$, то есть $L_z = const$.

Определим значения кинетических моментов L_{z0} при $t_1 = 0$ и $L_{z\tau}$ при $t_1 = T$ и приравняем эти значения.

Для $t_1 = 0$ $\quad L_{z0}=(J_z+m_2\cdot BO^2)\omega_\tau=0.$

При $t_1 > 0$ скорость точки K складывается из относительной скорости $\vec{V}_r$ по отношению к телу H и переносной скорости $\vec{V}_e$ в движении вместе с телом H. Поэтому для $t_1 = T$ покажем два вектора количества движения точки: $m_2\vec{V}_r$ и $m_2\vec{V}_e$.

Для $t_1 = T = 1c$ $\quad L_{zT}=J_z\omega_T+m_2\omega_T\cdot BK_T^2+m_2V_r\cdot BC.$

$$AK_T=2R\sin\left(\frac{s}{2R}\right)=2R\sin\left(\frac{0.5\pi Rt_1^2}{2R}\right)=2R\sin\left(\frac{\pi t_1^2}{4}\right)=2\cdot0.8\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot1^2}{4}\right)=0.8\sqrt{2}\ м.$$

$$AK_T^2=\left(0.8\sqrt{2}\right)^2=1.28\ м^2;\quad AB^2=a^2=1.6^2=2.56\ м^2;\quad BK_T^2+AK_T^2=AB^2;$$

$$BK_T^2=AB^2-AK_T^2=2.56-1.28=1.28\ м^2;\quad BK_T=\sqrt{1.28}=0.8\sqrt{2}\approx1.131\ м.$$

Отметим, что $AK_T = BK_T$, следовательно $\vec{V}_r \uparrow\uparrow AB$, отсюда $BC = R = 0.8\ м$.

Относительная скорость $\quad V_r=\frac{ds}{dt}=\frac{d(0.5\pi Rt_1^2)}{dt}=\pi Rt_1,$

при $t_1 = T = 1с$ $\quad V_r=\pi Rt_1=3.14\cdot0.8\cdot1\approx2.513\ м/с.$

Поэтому $\quad L_{zT}=356\cdot\omega_T+50\cdot\omega_T\cdot1.28+50\cdot2.513\cdot0.8=420\omega_T+100.531$

Приравнивая L_{z0} и $L_{z\tau}$: $\quad 0=420\omega_T+100.531,\quad$ находим $\omega_T=-0.23936\ рад/с.$

Ответ: $\omega_\tau=0;\quad \omega_T=-0.23936\ рад/с.$