

## Задача Д11 (вариант 12)

<http://www.termeh.ru>

Механическая система состоит из механизма (колёс 1 и 2) и груза 3. К колесу 1 приложена движущая сила  $P = P(t)$ . Время  $t$  отсчитывается от некоторого момента ( $t = 0$ ), когда угловая скорость колеса 1 равна  $\omega_0$ . Момент сил сопротивления ведомого колеса 2 равен  $M_c$ . Другие силы сопротивления движению системы не учитывать.

Массы колёс 1 и 2 равны  $m_1$  и  $m_2$ , а масса груза –  $m_3$ . Радиусы больших и малых окружностей колёс  $R_1, r_1, R_2, r_2$ . Относительно неподвижных осей колёс 1 и 2 заданы их радиусы инерции  $i_{x_1}$  и  $i_{x_2}$ .

Найти уравнение  $\varphi_1 = f(t)$  движения колеса 1 системы. Определить также натяжение нити  $T$  в заданный момент времени  $t_1$ . Найти, кроме того, окружное усилие  $S$  колёс 1 и 2 в точке их касания.

**Дано:**  $m_1 = 100 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 200 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 600 \text{ кг}$ ,  $R_1 = 0.30 \text{ м}$ ,  $r_1 = 0.20 \text{ м}$ ,  $R_2 = 0.60 \text{ м}$ ,

$i_{x_1} = 0.20\sqrt{2} \text{ м}$ ,  $i_{x_2} = 0.60 \text{ м}$ ,  $P = 5700 + 50t \text{ (Н)}$ ,  $M_c = 1500 \text{ Нм}$ ,  $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ ,  $\omega_0 = 2 \text{ рад/с}$ ,

$t_1 = 2 \text{ с}$ . Найти:  $\varphi_1 = f(t)$ ,  $T$ ,  $S$ .

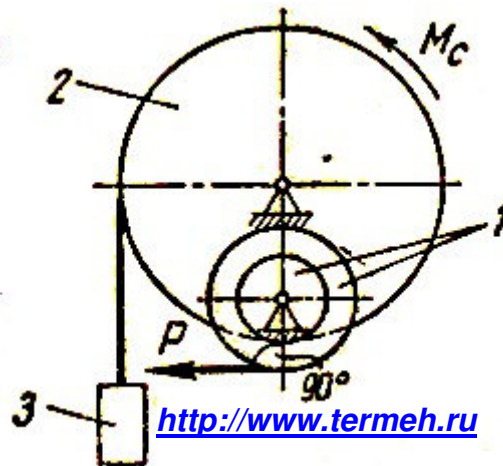


Рис.1.

### Решение

В данной механической системе колеса 1 и 2 механизма вращаются вокруг неподвижных осей, а поднимаемый груз 3 совершает поступательное движение.

Напишем дифференциальные уравнения движения каждого из этих трех тел, для чего отделим одно от другого, разрезав нить, удерживающую груз 3, и разъединив колеса 1 и 2 в точках соприкосновения зубцов (рис. 1).

К колесу 1 механизма приложены сила тяжести  $\vec{G}_1$ , движущая сила  $\vec{P}$ , составляющие реакции подшипника  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$ , окружное усилие  $\vec{S}_1$  и нормальная реакция  $\vec{N}_1$  колеса 2.

К колесу 2 механизма приложены сила тяжести  $\vec{G}_2$ , момент сил сопротивления  $M_c$ , составляющие реакции подшипника  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$ , натяжения  $\vec{T}$  нити, к которой подвешен груз 3, окружное усилие  $\vec{S}_2$  и нормальная реакция  $\vec{N}_2$  колеса 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести  $\vec{G}_3$ , и натяжение нити  $\vec{T}'$ .

Очевидно,  $\vec{S}_2 = -\vec{S}_1$ ,  $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$ ,  $\vec{T}' = -\vec{T}$ .

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 1 вокруг оси  $x_1$ :

$$J_{x_1} \ddot{\varphi}_1 = M_{x_1}^E,$$

здесь  $M_{x1}^E = \sum M_{ix1}^E$  – главный момент внешних сил, приложенных к колесу 1, относительно оси вращения  $x_1$ :  $\sum M_{ix1}^E = PR_1 - S_1r_1$ .

(Момент от силы  $\vec{P}$  приводит в движение колесо 1 и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый окружным усилием  $\vec{S}_1$  препятствует вращению колеса 1 и, следовательно, отрицателен.)

Дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 1 примет вид

$$J_{x1}\ddot{\varphi}_1 = PR_1 - S_1r_1. \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 2 вокруг оси  $x_2$ :

$$J_{x2}\ddot{\varphi}_2 = M_{x2}^E,$$

Здесь  $M_{x2}^E = \sum M_{ix2}^E$  – главный момент внешних сил, приложенных к колесу 2, относительно оси вращения  $x_2$ :  $\sum M_{ix2}^E = S_2R_2 - TR_2 - M_c$ .

(Момент, создаваемый окружным усилием  $\vec{S}_2$  приводит в движение, колесо 2 и поэтому принят положительным, а момент силы натяжения нити  $\vec{T}$  и момент сил сопротивления  $M_c$  препятствуют движению колеса 2 и, следовательно, отрицательны.)

Дифференциальное уравнение вращательного движения колеса 2 имеет вид

$$J_{x2}\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - TR_2 - M_c. \quad (2)$$

Составим дифференциальное уравнение поступательного движения груза 3:

$$m_3\ddot{y} = Y^E.$$

Здесь  $Y^E = \sum Y_i^E$  – проекция главного вектора внешних сил, приложенных к грузу 3, на ось  $y$ , направленную в сторону движения груза, т.е. вверх:  $\sum Y_i^E = T' - G_3$ .

Дифференциальное уравнение поступательного движения груза 3

$$m_3\ddot{y} = T' - G_3. \quad (3)$$

В уравнениях (1), (2), (3) неизвестными являются силы  $T' = T$  и  $S_1 = S_2 = S$ , а также функции  $\ddot{\varphi}_1(t)$ ,  $\ddot{\varphi}_2(t)$  и  $\ddot{y}(t)$  – угловые ускорения колес 1, 2 и ускорение груза 3 соответственно.

Но указанные функции связаны между собой соотношениями

$$\frac{\ddot{\varphi}_1}{\ddot{\varphi}_2} = \frac{R_2}{r_1}, \quad (4)$$

$$\ddot{y} = \ddot{\varphi}_2 R_2. \quad (5)$$

так, что в трех уравнениях – три неизвестные:  $T$ ,  $S$ ,  $\ddot{\varphi}_2$ .

Выразим  $\ddot{\varphi}_1$  из (4):  $\ddot{\varphi}_1 = \frac{R_2}{r_1}\ddot{\varphi}_2$  и подставим в (1):

$$J_{x1} \frac{R_2}{r_1} \ddot{\varphi}_2 = PR_1 - S_1r_1. \quad (6)$$

Исключим из дифференциального уравнения (2) силу  $T$ , для чего выразим  $T(T' = T)$  из (3):  $T = m_3\ddot{y} + G_3$ . Учитывая (5), напомним  $T = m_3\ddot{\varphi}_2 R_2 + G_3$ .

Тогда (2) приобретает вид  $J_{x2}\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - (m_3\ddot{\varphi}_2 R_2 + G_3)R_2 - M_c$  или

$$(J_{x2} + m_3R_2^2)\ddot{\varphi}_2 = S_2R_2 - G_3R_2 - M_c. \quad (7)$$

Исключим  $S(S = S_1 = S_2)$  из (6) и (7), для чего умножим (6) на  $R_2$ , а (7) – на  $r_1$ :

$$J_{x1} \frac{R_2^2}{r_1} \ddot{\varphi}_2 = PR_1R_2 - S_1r_1R_2,$$

$$(J_{x2} + m_3R_2^2)r_1\ddot{\varphi}_2 = S_2r_1R_2 - G_3r_1R_2 - M_c r_1.$$

Сложив соответствующие части полученных уравнений, имеем

$$\left( J_{x1} \frac{R_2^2}{r_1} + (J_{x2} + m_3 R_2^2) r_1 \right) \ddot{\varphi}_2 = PR_1 R_2 - G_3 r_1 R_2 - M_c r_1,$$

откуда

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{PR_1 R_2 - G_3 r_1 R_2 - M_c r_1}{J_{x1} \frac{R_2^2}{r_1} + (J_{x2} + m_3 R_2^2) r_1}. \quad (8)$$

Выражение (8) определяет в общем виде угловое ускорение колеса 2 механизма.

Учитывая соотношение (4), из (8) получим выражение в общем виде для углового ускорения колеса 1:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{PR_1 R_2 - G_3 r_1 R_2 - M_c r_1}{J_{x1} \frac{R_2^2}{r_1} + (J_{x2} + m_3 R_2^2) r_1} \cdot \frac{R_2}{r_1} = \frac{(5700 + 50t) \cdot R_1 - m_3 g r_1 - M_c \frac{r_1}{R_2}}{J_{x1} + J_{x2} \left( \frac{r_1}{R_2} \right)^2 + m_3 r_1^2}. \quad (9)$$

Здесь  $G_3 = m_3 g$ ,  $g$  – ускорение свободного падения.

Моменты инерции колес 1 и 2 относительно осей  $x_1$  и  $x_2$ :

$$J_{x1} = m_1 i_{x1}^2; \quad J_{x2} = m_2 i_{x2}^2. \quad (10)$$

Произведём вычисления по формулам (10) и (9), учитывая исходные данные:

$$J_{x1} = m_1 i_{x1}^2 = 100 \cdot (0.20\sqrt{2})^2 = 8 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad J_{x2} = m_2 i_{x2}^2 = 200 \cdot 0.60^2 = 72 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{(5700 + 50t)R_1 - m_3 g r_1 - M_c \frac{r_1}{R_2}}{J_{x1} + J_{x2} \left( \frac{r_1}{R_2} \right)^2 + m_3 r_1^2} = \frac{(5700 + 50t) \cdot 0.30 - 600 \cdot 9.81 \cdot 0.20 - 1500 \cdot \frac{0.20}{0.60}}{8 + 36 \cdot \left( \frac{0.20}{0.60} \right)^2 + 600 \cdot 0.20^2};$$
$$\ddot{\varphi}_1 = 0.375t + 0.82. \quad (11)$$

Интегрируем это уравнение дважды, используя следующие начальные условия задачи: при  $t = 0$   $\varphi_{10} = 0$ ;  $\dot{\varphi}_{10} = \omega_{10} = 2 \text{ рад/с}$ .

Первый интеграл  $\dot{\varphi}_1 = 0.1875t^2 + 0.82t + C_1$ .

Второй интеграл  $\varphi_1 = 0.0625t^3 + 0.41t^2 + C_1 t + C_2$ .

Напишем полученные уравнения  $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1(t)$  и  $\varphi_1 = \varphi_1(t)$  для  $t = 0$ :  $\dot{\varphi}_{10} = C_1$ ;  $\varphi_{10} = C_2$ ,

откуда  $C_1 = 2 \text{ рад/с}$ ;  $C_2 = 0$ .

Уравнение угловой скорости звена 1 имеет вид

$$\dot{\varphi}_1 = 0.1875t^2 + 0.82t + 2 \text{ рад/с}. \quad (12)$$

Искомое уравнение вращательного движения колеса 2 имеет вид:

$$\varphi_1 = 0.0625t^3 + 0.41t^2 + 2t \text{ (рад)}. \quad (13)$$

Натяжение нити  $T$  найдем, как было показано, из уравнения (3):  $T = m_3 \ddot{y} + G_3$  или

$$T = m_3 (\ddot{\varphi}_2 R_2) + m_3 g = m_3 \left( \frac{r_1}{R_2} \ddot{\varphi}_1 R_2 + g \right) = m_3 (r_1 \ddot{\varphi}_1 + g). \quad (14)$$

При  $t_1 = 2 \text{ с}$ , учитывая (11) и исходные данные, имеем

$$T = m_3 (r_1 \cdot (0.375t_1 + 0.82) + g) = 600 \cdot (0.20 \cdot (0.375 \cdot 2 + 0.82) + 9.81) = 6074.4 \text{ Н}. \quad (15)$$

Окружное усилие определяем из уравнения (1):

$$J_{x1} \ddot{\varphi}_1 = PR_1 - S_1 r_1. \Rightarrow S = S_1 = \frac{PR_1 - J_{x1} \ddot{\varphi}_1}{r_1}, \quad \text{при } t_1 = 2 \text{ с, учитывая (11), имеем}$$
$$S = \frac{(5700 + 50t_1) \cdot R_1 - J_{x1} \cdot (0.375t_1 + 0.82)}{r_1} = \frac{(5700 + 50 \cdot 2) \cdot 0.30 - 8 \cdot (0.375 \cdot 2 + 0.82)}{0.20} = 8637.2 \text{ Н}$$

**Ответ:**  $\varphi_1 = 0.0625t^3 + 0.41t^2 + 2t \text{ (рад)}$ ;  $T = 6074 \text{ Н}$ ;  $S = 8637 \text{ Н}$ .