Механическая система тел 1-5 движется под воздействием сил тяжести $\vec{P}_i$ $(i=\overline{1,5})$. Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях.

Массами нитей пренебречь, силы сопротивления в подшипниках не учитывать.

Колёса 3, 4, 5 считать сплошными однородными дисками.

Дано: $m_1=m,\ m_2=2m,\ m_3=2m,\ m_4=2m,\ m_5=2m,\ \ f,\ \ q_1=x,\ q_2=\xi.$

Начальные условия: $q_{10}=0,\ q_{20}=0,\ \dot{q}_{10}=0,\ \dot{q}_{20}=\dot{\xi}_0$ или $x_0=0,\ \xi_0=0,\ \dot{x}_0=0,\ \dot{\xi}_0=\dot{\xi}_0.$

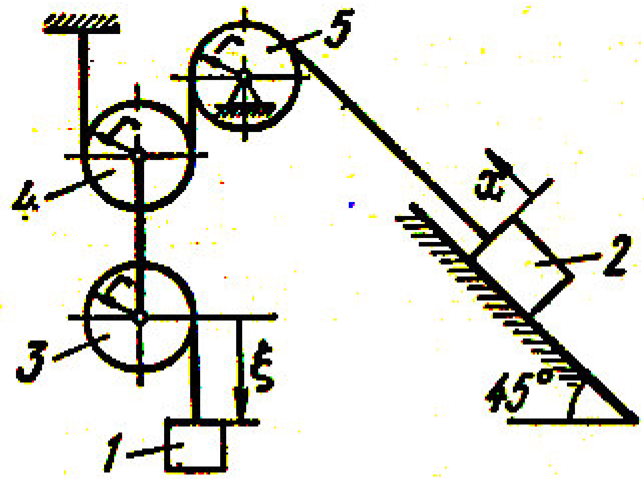

Рис.1

Решение

Для решения задачи применим уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{\partial \Pi}{\partial x}+Q_1; \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}-\frac{\partial T}{\partial \xi}=-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}+Q_2. \qquad (2)$$

Здесь T – кинетическая энергия системы; Π – потенциальная энергия; Q_1 и Q_2 – обобщенные силы, соответствующие неконсервативным силам.

Для данной системы $\quad T=\sum_{i=1}^{5}T_i. \qquad (3)$

Выразим скорости центров масс и угловые скорости твёрдых тел системы через обобщённые скорости:

$$v_2=\dot{x},\quad \omega_5=\frac{\dot{x}}{r},\quad \omega_4=\frac{\dot{x}}{2r},\quad v_4=0.5\dot{x},\quad v_3=0.5\dot{x},\quad v_1=0.5\dot{x}+\dot{\xi},\quad \omega_3=\frac{\dot{\xi}}{r}. \qquad (4)$$

Моменты инерции относительно центральных осей:

$$J_3=J_4=J_5=\frac{2m}{2}r^2=mr^2. \qquad (5)$$

Кинетическая энергия тел 1, 2, 3, 4, 5:

$T_1=0.5m_1v_1^2=0.5m(0.5\dot{x}+\dot{\xi})^2;$

$T_2=0.5m_2v_2^2=0.5\cdot 2m\cdot \dot{x}^2=m\dot{x}^2;$

$T_3=0.5m_3v_3^2+0.5J_3\omega_3^2=0.5\cdot 2m\cdot(0.5\dot{x})^2+0.5\cdot mr^2\cdot\left(\frac{\dot{\xi}}{r}\right)^2=0.5m\cdot(0.5\dot{x}^2+\dot{\xi}^2);$

$T_4=0.5m_4v_4^2+0.5J_4\omega_4^2=0.5\cdot 2m\cdot(0.5\dot{x})^2+0.5\cdot mr^2\cdot\left(\frac{\dot{x}}{2r}\right)^2=0.375m\dot{x}^2;$

$$T_5 = 0.5J_5\omega_5^2 = 0.5\cdot mr^2\cdot\left(\frac{\dot x}{r}\right)^2 = 0.5m\dot x^2.$$

Подставляя все величины в (3), получим

$$T = 0.5m(0.5\dot x+\dot\xi)^2 + m\dot x^2 + 0.5m(0.5\dot x^2+\dot\xi^2) + 0.375m\dot x^2 + 0.5m\dot x^2 = m(2.25\dot x^2 + 0.5\dot x\dot\xi + \dot\xi^2). \quad (6)$$

Потенциальную энергию системы находим как работу сил тяжести твёрдых тел 1, 2, 3 и 4 при их перемещении из данного положения, характеризуемого координатами x и ξ, в некоторое исходное нулевое, например то, от которого ведётся отсчет обобщенных координат:

$$\varPi = \varPi_1 + \varPi_2 + \varPi_3 + \varPi_4. \quad (7)$$

$$\varPi_1 = -m_1 g(x+\xi) = -mg(x+\xi); \qquad \varPi_2 = 2mgx\sin 45^\circ = \sqrt{2}mgx;$$

$$\varPi_3 = -m_3 g\cdot 0.5x = -2mg\cdot 0.5x = -mgx; \qquad \varPi_4 = -m_4 g\cdot 0.5x = -2mg\cdot 0.5x = -mgx.$$

Подставляя все величины в (7), получим

$$\varPi = -mg(x+\xi) + \sqrt{2}mgx - mgx - mgx = -mg((3-\sqrt{2})x+\xi). \quad (8)$$

Обобщённые силы Q_1 и Q_2 можно определить из выражений работы неконсервативных сил на элементарных перемещениях системы, соответствующих вариации каждой обобщенной координаты, или, что тоже самое, из выражений мощности N_1 и N_2 неконсервативных сил на возможных скоростях системы, соответствующих возрастанию каждой обобщённой координаты

$$Q_1 = \frac{N_1}{\dot x}; \qquad Q_2 = \frac{N_2}{\dot\xi}.$$

В данном случае $Q_1 = -m_2 gf\cos 45^\circ = -2mgf\,0.5\sqrt{2} = -\sqrt{2}mgf;$ $\qquad Q_2 = 0.$ (9)

Подставляем (6) (7) и (9) в (1) и (2), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot x} = m(4.5\dot x + 0.5\dot\xi); \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot x} = 0.5m(9\ddot x+\ddot\xi); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial\varPi}{\partial x} = -mg(3-\sqrt{2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\xi} = m(0.5\dot x + 2\dot\xi); \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot\xi} = 0.5m(\ddot x+4\ddot\xi); \quad \frac{\partial T}{\partial\xi} = 0; \quad \frac{\partial\varPi}{\partial\xi} = -mg;$$

$$0.5m(9\ddot x+\ddot\xi) = mg(3-\sqrt{2}) - \sqrt{2}mgf \quad\Rightarrow\quad 9\ddot x+\ddot\xi = (6-2\sqrt{2}(1+f))g; \quad (10)$$

$$0.5m(\ddot x+4\ddot\xi) = mg \quad\Rightarrow\quad \ddot x+4\ddot\xi = 2g. \quad (11)$$

Решаем совместно (10) и (11), находим

$$\begin{cases}9\ddot x+\ddot\xi = (6-2\sqrt{2}(1+f))g;\\ 9\ddot x+36\ddot\xi = 18g.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}35\ddot\xi = (12+2\sqrt{2}(1+f))g;\\ 0.25\ddot x+\ddot\xi = 0.5g.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\ddot\xi = \dfrac{12+2\sqrt{2}(1+f)}{35}g;\\ 0.25\ddot x + \dfrac{12+2\sqrt{2}(1+f)}{35}g = 0.5g\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot x = \dfrac{22-8\sqrt{2}(1+f)}{35}g;\\ \ddot\xi = \dfrac{12+2\sqrt{2}(1+f)}{35}g.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot x = 0.5A;\\ \ddot\xi = 0.5B.\end{cases},$$

где $A = \dfrac{44-16\sqrt{2}(1+f)}{35}g;\quad B = \dfrac{24+4\sqrt{2}(1+f)}{35}g.$

$$\dot x = 0.5At + C_1; \;\Rightarrow\; \dot x_0 = C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \;\Rightarrow\; \dot x = 0.5At \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x = At^2 + C_2 \;\Rightarrow\; x_0 = C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = At^2.$$

$$\dot\xi = 0.5Bt + C_3; \;\Rightarrow\; \dot\xi_0 = C_3 \;\Rightarrow\; C_3 = \dot\xi_0 \;\Rightarrow\; \dot\xi = 0.5Bt + \dot\xi_0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \xi = Bt^2 + \dot\xi_0 t + C_4 \;\Rightarrow\; \xi_0 = C_4 \;\Rightarrow\; C_4 = 0 \;\Rightarrow\; \xi = Bt^2 + \dot\xi_0 t.$$

Ответ: $x = \dfrac{44-16\sqrt{2}(1+f)}{35}gt^2;\quad \xi = \dfrac{24+4\sqrt{2}(1+f)}{35}gt^2 + \dot\xi_0 t.$