Д.23 – 1 вариант

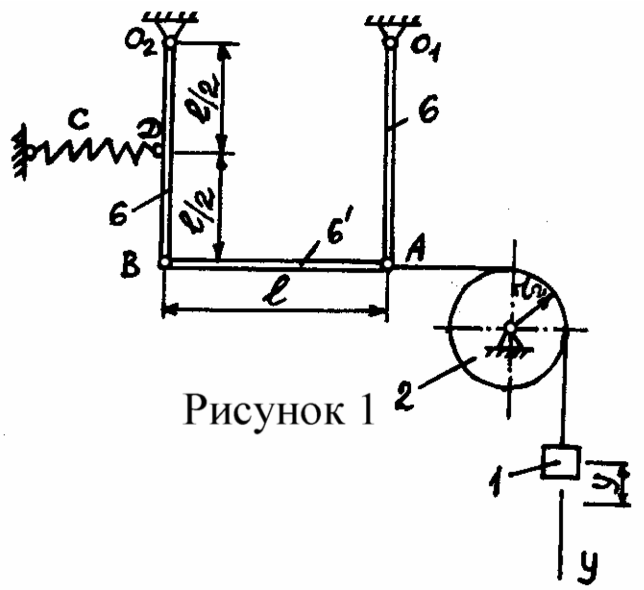

Рисунок 1

Дано:

$m_1 = 1кг; m_2 = 2кг; m_6 = 3кг; \ell = 0,5м;$

$C = 40\,Н/см; y_\circ = 0,1см; \dot{y}_\circ = 5,0\,м/с.$

(блок 2 – сплошной однородный диск)

Определить циклическую частоту К и период Т малых свободных колебаний системы, а так же получить уравнение $y = y(t)$ колебаний груза 1 и найти амплитуду его колебаний.

Решение:

Воспользуемся уравнения Лагранжа II рода для консервативной системы. Приняв за обобщенную координату системы вертикальное отклонение У груза 1 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем:

$$\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial П}{\partial y};(1)$$

где Т – кинетическая энергия системы;

П – потенциальная энергия системы.

Кинетическую энергию Т вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно $\dot{y}$ и y, а потенциальную энергию П – с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты У.

Найдем кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий тел $1,2,6,6'$.

Выразим угловые скорости тел 2, 6 через обобщенную скорость $\dot{y}$:

$$\upsilon_1 = \dot{y}\,;\ \omega_2 = \dot{y}/r_2\,;\ \omega_6 = \dot{y}/\ell\,;\ \upsilon_{6'} = \dot{y}$$

Моменты инерции тел 2 и 6 относительно оси вращения:

$$\mathcal{J}_2 = m_2 \cdot r_2^2/2\ ;\ \mathcal{J}_6 = m_6 \cdot \ell^2/3$$

Кинетическая энергия тел $1,2,6,6'$ имеет следующий вид:

$$T_1=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\upsilon_1^2=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\dot{y}^2;\quad T_2=\frac{1}{2}\cdot\mathcal{J}_2\cdot\omega_2^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_2\cdot r_2^2}{2}\cdot\frac{\dot{y}^2}{r_2^2}=\frac{m_2\cdot\dot{y}^2}{4};$$

$$T_6=\frac{1}{2}\cdot\mathcal{J}_6\cdot\omega_6^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_6\cdot\ell^2}{2}\cdot\frac{\dot{y}^2}{\ell^2}=\frac{1}{6}\cdot m_6\cdot\dot{y}^2;\quad T_{6'}=\frac{1}{2}\cdot m_6\cdot\upsilon_{6'}^2=\frac{1}{2}\cdot m_6\cdot\dot{y}^2;$$

$$T=T_1+T_2+2T_6+T_{6'}=\frac{1}{2}\cdot m_1\cdot\dot{y}^2+\frac{1}{4}\cdot m_2\cdot\dot{y}^2+2\cdot\frac{1}{6}\cdot m_6\cdot\dot{y}^2+\frac{1}{2}\cdot m_6\cdot\dot{y}^2=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[m_1+\frac{1}{2}\cdot m_2+\frac{5}{3}\cdot m_6\right]\cdot\dot{y}^2;$$

Найдем потенциальную энергию системы, которая определится работой сил тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклоненного положения положения, когда груз 1 имеет координату У, в нулевое положение, которым считаем положение покоя системы:

$$\Pi=\Pi_I+\Pi_{II}$$

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести при указанном перемещении, $\Pi_I=-G_1\cdot y+2\cdot G_6\cdot h_6+G_6\cdot h_{6'}$; где $h_6,h_{6'}$ - вертикальное смещение центров тяжести стержней 6 и $6'$ соответственно, которые вычисляем с точностью до величины второго порядка малости относительно обобщенной координаты У (рисунок 2).

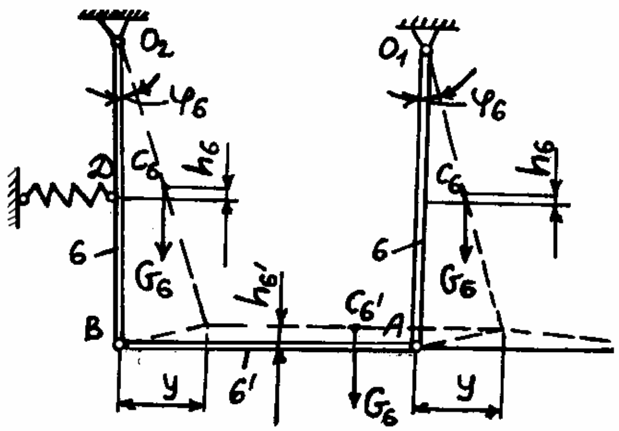

Рисунок 2

$$h_6=\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2}\cdot\cos\varphi_6=\frac{\ell}{2}\cdot\left(1-\cos\varphi_6\right)$$

$$h_{6'}=\ell-\ell\cdot\cos\varphi_6=\ell\cdot\left(1-\cos\varphi_6\right)$$

$$\varphi_6=\frac{y}{\ell};$$

Ограничиваясь в формуле разложения $\cos\varphi=1-\varphi^2/2!+\varphi^4/4!...$ первыми двумя членами, имеем:

$$h_6=\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\varphi_6^2}{2}=\frac{\ell}{2}\cdot\frac{y^2}{2\cdot\ell^2}=\frac{y^2}{4\cdot\ell};\qquad h_{6'}=\ell\cdot\frac{\varphi_6^2}{2}=\ell\cdot\frac{y^2}{2\cdot\ell^2}=\frac{y^2}{2\cdot\ell};$$

Таким образом,

$$П_{I} = -G_1 \cdot y + 2 \cdot G_6 \cdot \frac{y^2}{4 \cdot \ell} + G_6 \cdot \frac{y^2}{2 \cdot \ell} = -G_1 \cdot y + G_6 \cdot \frac{y^2}{\ell}$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна:

$$П_{II} = \frac{C \cdot \left(f_{ст.} + \lambda_{Д} \right)^2}{2} - \frac{C \cdot f_{ст.}^2}{2},$$

где $f_{ст.}$ - статическая деформация пружины;

$\lambda_{Д}$ - перемещение точки прикрепления пружины Д, соответствующее координате У, $\lambda_{Д} = \frac{1}{2} \cdot y$;

$$П_{II} = \frac{C \cdot \left(f_{ст.} + \frac{y}{2} \right)^2}{2} - \frac{C \cdot f_{ст.}^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \left(f_{ст.}^2 + f_{ст.} \cdot y + \frac{1}{4} \cdot y^2 \right) -$$

$$- \frac{C \cdot f_{ст.}^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot f_{ст.} \cdot C \cdot y + \frac{1}{8} \cdot C \cdot y^2;$$

Тогда

$$П = П_{I} + П_{II} = -G_1 \cdot y + G_6 \cdot \frac{y^2}{\ell} + \frac{1}{2} \cdot f_{ст.} \cdot C \cdot y + \frac{1}{8} \cdot C \cdot y^2;$$

Так как в положении покоя, соответствующем статической деформации пружины, $\left(\frac{\partial П}{\partial y} \right) = 0$, то $-G_1 + \frac{1}{2} \cdot f_{ст.} \cdot C = 0, (a)$.

Уравнение (а) можно получить так же, составив уравнение моментов сил $\sum M_{i_{O_2}} = 0$ для положения покоя системы (рисунок 3).

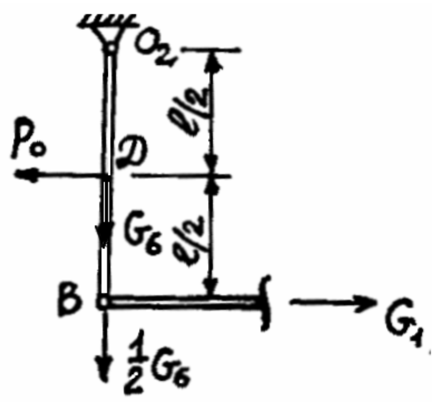

Рисунок 3

$$\sum M_{i_{O_2}} = -P_{o} \cdot \frac{\ell}{2} + G_1 \cdot \ell = 0; \quad P_{o} = C \cdot f_{ст.};$$

$$-C \cdot f_{ст.} \cdot \frac{\ell}{2} + G_1 \cdot \ell = 0; \text{ или } -G_1 + \frac{1}{2} \cdot f_{ст.} \cdot C = 0;$$

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой механической системы:

$$П = G_6 \cdot \frac{y^2}{\ell} + \frac{1}{8} \cdot C \cdot y^2 = \left(\frac{G_6}{\ell} + \frac{C}{8} \right) \cdot y^2;$$

Найдем значение членов уравнения (1) :

$$\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \left(m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + \frac{5}{3} \cdot m_6 \right) \cdot \ddot{y}; \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial П}{\partial y} = \left(\frac{2 \cdot G_6}{\ell} + \frac{C}{4} \right) \cdot y,$$ уравнение (1) приобретает вид:

$$\left(m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + \frac{5}{3} \cdot m_6 \right) \cdot \ddot{y} + \left(\frac{2 \cdot G_6}{\ell} + \frac{C}{4} \right) \cdot y = 0;$$

или

$$\ddot{y} + \frac{\frac{2 \cdot G_6}{\ell} + \frac{C}{4}}{m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + \frac{5}{3} \cdot m_6} \cdot y = 0;$$

Обозначив κ^2 коэффициент при У, имеем: $\ddot{y} + \kappa^2 \cdot y = 0, (2)$

циклическая частота свободных колебаний

$$\kappa = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot G_6}{\ell} + \frac{C}{4}}{m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + \frac{5}{3} \cdot m_6}} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot 3 \cdot 9{,}81}{0{,}5} + \frac{4000}{4}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{5}{3} \cdot 3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{117{,}72 + 1000}{7}} = 12{,}64 \ {}^{1}\!/_{c}$$

Период свободных колебаний $T = \dfrac{2\pi}{\kappa} = \dfrac{2 \cdot 3{,}14}{12{,}64} = 0{,}497c$

Интегрируя уравнения (2), получаем уравнение движения груза 1:

$$y = C_1 \cdot \cos \kappa \cdot t + C_2 \cdot \sin \kappa \cdot t .$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдем уравнение скорости груза: $\dot{y} = -\kappa \cdot C_1 \cdot \sin \kappa \cdot t + \kappa \cdot C_2 \cdot \cos \kappa \cdot t$ и воспользуемся начальными условиями задачи. Из уравнений $y = y(t)$ и $\dot{y} = \dot{y}(t)$ при $t = 0$ имеем:

$$y_\circ = C_1; \; \dot{y}_\circ = \kappa \cdot C_2$$

Следовательно, $C_1 = y_\circ = 0{,}001(м)$; $C_2 = \dfrac{\dot{y}_\circ}{\kappa} = \dfrac{5{,}0}{12{,}64} = 0{,}396(м)$.

Подставляем эти значения C_1 и C_2 в уравнение $y = y(t)$:

$$y = 0{,}001 \cdot \cos 12{,}64 \cdot t + 0{,}396 \cdot \sin 12{,}64 \cdot t$$

Уравнение $y = y(t)$ можно получить в другом виде, перейдя к другим постоянным интегрирования **a** и **β**, приняв $C_1 = a \cdot \sin \beta$, $C_2 = a \cdot \cos \beta$.

Тогда $y = a \cdot \sin(\kappa \cdot t + \beta)$, где $a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$,

$\beta = arctg\,(C_1/C_2)$ или $a = \sqrt{y_\circ^2 + (\dot{y}_\circ/\kappa)^2}$; $\beta = arctg\,(\kappa \cdot y_\circ/\dot{y}_\circ)$.

Найдем числовое значение **a** и **β:**

$$a = \sqrt{0{,}001^2 + 0{,}396^2} = 0{,}396м;$$

$$\beta = arctg \frac{12{,}64 \cdot 0{,}001}{5{,}0} = arctg\,0{,}0025;$$

Так как $\sin \beta > 0, (C_1 > 0)$, то $\beta = 0{,}145\,рад (8^\circ 18')$.

Окончательно принимаем: $y = 0{,}396 \cdot \sin(12{,}64t + 0{,}145), м$

Амплитуда **a** = 0,396м