Задача К1 (*вариант 1*) http://www.termeh.ru

По заданным уравнениям движения точки *M* установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (*с*) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Таблица 1

Исходные данные.

Уравнение движения по оси *x*, см.	Уравнение движения по оси *y*, см.	Время, *с*.	
$x(t) = -2t^2 + 3$	$y(t) = -5t$	$t_1 = 0.5$	(1)

Решение.

Уравнения движения (1) можно рассматривать как метрические уравнения траектории точки. Чтобы получить уравнение траектории в координатной форме, исключим время *t* из уравнения.

Получаем $$x = -2\left(\frac{y}{-5}\right)^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad x = -0.08y^2 + 3,$$

т. с. траекторией точки является парабола, заданная на рис. 1.

Вектор скорости точки $\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}$. (2)

Вектор ускорения $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$. (3)

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты осей *x* и *y*;

V_x, V_y, a_x, a_y – проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$V_x = \dot{x} = -4t_1 = -4\cdot 0.5 = -2\ см/с$; $\quad V_y = \dot{y} = -5\ см/с$;

$a_x = \ddot{x} = -4\ см/с$; $\quad a_y = \ddot{y} = 0$.

По найденным проекциям определяются модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385\ см/с \qquad (4)$$

и модуль ускорения точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = 4\ см/с^2. \qquad (5)$$

Модуль касательного ускорения точки

$$a_\tau = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|\vec{V}\cdot\frac{\vec{a}}{V}\right| = \frac{|V_x a_x + V_y a_y|}{V} = \frac{|(-2)(-4) + (-5)\cdot 0|}{\sqrt{29}} = \frac{|+8|}{\sqrt{29}} \approx 1.486\ см/с, \qquad (6)$$

где dV/dt выражает проекцию ускорения точки на направление её скорости. Знак «+» при dV/dt означает, что движение точки ускоренное, направления $\vec{a}_\tau$ и $\vec{V}$ совпадают; знак «–» – что движение замедленное.

Модуль нормального ускорения точки $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$. (7)

Так как радиус кривизны траектории ρ в рассматриваемой точке неизвестно, то a_n можно определить по формуле $a_n = \dfrac{|\vec{V}\times\vec{a}|}{V}$. При движении в плоскости данная формула принимает вид

$$a_n = \frac{|V_x a_y - V_y a_x|}{V} = \frac{|(-2)\cdot 0 - (-5)\cdot(-4)|}{\sqrt{29}} = \frac{20}{\sqrt{29}} \approx 3.714\ см/с^2. \qquad (8)$$

Модуль нормального ускорения можно определить также по формуле

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{8}{\sqrt{29}}\right)^2} = \frac{20}{\sqrt{29}} \approx 3.714 \; см/с^2 . \qquad (9)$$

После определения нормального ускорения радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определяется из выражения (7) и равен

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{\left(\sqrt{29}\right)^2}{\left(20/\sqrt{29}\right)} = \frac{\sqrt{29^3}}{20} \approx 7.808 \; см. \qquad (10)$$

Результаты вычислений по формулам (1), (4) –(6), (8) и (10) для заданного момента времени t_1= 0.5 *с* приведены в таблице 2

Таблица 2

Результаты вычислений

Координаты, *см*		Скорость, *см/с*			Ускорение, *см/с*^{2}					Радиус кривизны, *см*
x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2.5	–2.5	–2	– 5	5.385	–4	0	4	1.486	3.714	7.808

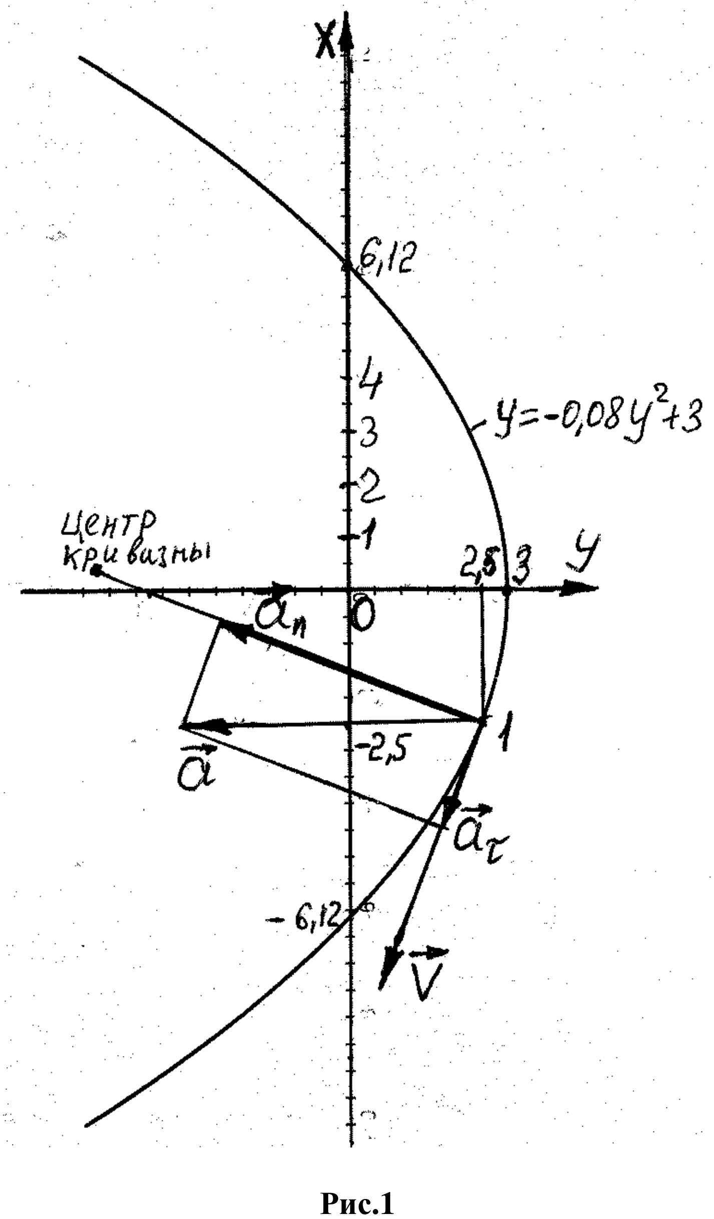

Рис.1