Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Вариант 23

По заданным уравнения движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

Исходные данные:

$$x = 3 - 3t^2 + t \text{ (см)}; y = 4 - 5t^2 + \frac{5t}{3} \text{ (см)}; \quad (1)$$

$$t_1 = 1 \text{ с}.$$

Решение:

Заданные уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения движения точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время t из уравнений (1). Для этого уравнение для x умножим на 5, а уравнение для y умножим на 3 и вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} 5x = 15 - 15t^2 + 5t \\ 3y = 12 - 15t^2 + 5t \end{cases} \Rightarrow 5x - 3y = 3 \Rightarrow y = \frac{5x}{3} - 1.$$

Таким образом, получили, что траекторией точки является прямая с угловым коэффициентом $\frac{5}{3}$, проходящая через точки (0;-1) и (3;4) и находящаяся в 1 и 3 четвертях.

Найдем положение точки в заданный момент времени, подставив $t_1 = 1$ с в уравнения движения (1), в результате получим:

$$x_1 = 3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 1 \text{ (см)}; y_1 = 4 - 5 \cdot 1^2 + \frac{5 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3} = 0{,}67 \text{ (см)}.$$

Вектор скорости точки $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$. Вектор ускорения $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$. Здесь $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ - орты осей x и y; v_x, v_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$v_x = \dot{x} = -6t + 1;\ v_y = \dot{y} = -10t + \frac{5}{3};$$

$$a_x = \ddot{x} = -6 \text{ см/с}^2;\ a_y = \ddot{y} = -10 \text{ см/с}^2.$$

По найденным проекциям скорости определяем их значения в заданный момент времени.

При $t = t_1 = 1$ с: $v_{x1} = -6 \cdot 1 + 1 = -5$ см/с; $v_{y1} = -10 \cdot 1 + \frac{5}{3} = -8{,}33$ см/с.

Модуль скорости: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-8{,}33)^2} = 9{,}72$ см/с.

Проекции ускорения являются величинами постоянными, а значит и при $t = t_1 = 1$ с:

$$a_{x1} = -6 \text{ см/с}^2;\ a_{y1} = -10 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-10)^2} = 11{,}66$ см/с^2.

Модуль касательного ускорения точки найдем по формуле:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \Rightarrow$$

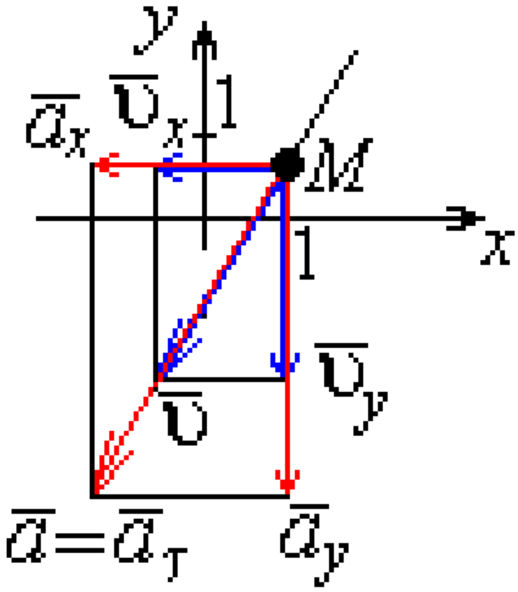
при $t = t_1 = 1$ с : $a_{\tau 1} = \frac{v_{x1}a_{x1} + v_{y1}a_{y1}}{v_1} = \frac{(-5)\cdot(-6) + (-8{,}33)\cdot(-10)}{9{,}72} = 11{,}66$ см/с^2.

Модуль нормального ускорения точки найдем по формуле: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \Rightarrow$

при $t = t_1 = 1$ с: $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{11{,}66^2 - 11{,}66^2} = 0.$

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определим из выражения $\rho = \frac{v^2}{a_n}$, то есть при $t = t_1 = 1$ с: $\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}} = \frac{9{,}72^2}{0} = \infty$ (это подтверждает, что траекторией точки является прямая).

На рисунке показано положение точки M в заданный момент времени. Вектор $\vec{v}$ строим по составляющим $\vec{v}_x$ и $\vec{v}_y$, причем этот вектор совпадает по направлению с прямой (траекторией точки). Вектор $\vec{a}$ строим по составляющим $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$, а затем раскладываем на составляющие $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$. В нашем случае полное ускорение $\vec{a}$ совпадает с касательной составляющей $\vec{a}_\tau$, поэтому оно направлено также как и скорость вдоль прямой (траектории точки). Причем по направлению скорость и касательное ускорение совпадают, значит в данный момент времени движение ускоренное.



Результаты вычисления для заданного момента времени $t_1 = 1$ с:

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с^2					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
1	0,67	-5	-8,33	9,72	-6	-10	11,66	11,66	0	∞