

## Задание К.1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

Вариант 28

По заданным уравнениям движения точки  $M$  установить вид ее траектории и для момента времени  $t = t_1$  (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.

**Исходные данные:**

$$\begin{aligned}x &= -4t^2 + 1 \text{ (см); } y = -3t \text{ (см);} \\t_1 &= 1 \text{ с.}\end{aligned} \quad (1)$$

**Решение:**

Заданные уравнения движения (1) можно рассматривать как параметрические уравнения движения точки. Чтобы получить уравнения траектории в координатной форме, исключим время  $t$  из уравнений (1). Для этого выразим  $t$  из уравнения для  $y$  и подставим в уравнение для  $x$ :

$$\begin{cases} t = -\frac{y}{3} \\ x = -4\left(-\frac{y}{3}\right)^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{9}y^2 + 1.$$

Таким образом, получили, что траекторией точки является парабола с вершиной в точке (1;0) и ветвями, направленными вдоль оси  $x$  в сторону уменьшения координаты  $x$ , а так как время  $t$  может быть величиной только неотрицательной, то траекторией точки является нижняя ветвь параболы, лежащая в 4 и 3 четвертях.

Найдем положение точки в заданный момент времени, подставив  $t_1 = 1$  с в уравнения движения (1), в результате получим:

$$x_1 = -4 \cdot 1^2 + 1 = -3 \text{ (см); } y_1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ (см).}$$

Вектор скорости точки  $\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ . Вектор ускорения  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ . Здесь  $\vec{i}, \vec{j}$  - орты осей  $x$  и  $y$ ;  $v_x, v_y, a_x, a_y$  - проекции скорости и ускорения точки на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения движения (1):

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = -8t; \quad v_y = \dot{y} = -3; \\a_x &= \ddot{x} = -8 \text{ см/с}^2; \quad a_y = \ddot{y} = 0 \text{ см/с}^2.\end{aligned}$$

По найденным проекциям скорости определяем их значения в заданный момент времени.

При  $t = t_1 = 1$  с:  $v_{x1} = -8 \cdot 1 = -8$  см/с;  $v_{y1} = -3$  см/с.

Модуль скорости:  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = 8,544$  см/с.

Проекции ускорения являются величинами постоянными, а значит и при  $t = t_1 = 1$  с:

$$a_{x1} = -8 \text{ см/с}^2; \quad a_{y1} = 0 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения:  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{a_{x1}^2 + a_{y1}^2} = \sqrt{(-8)^2 + (0)^2} = 8$  см/с<sup>2</sup>.

Модуль касательного ускорения точки найдем по формуле:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \Rightarrow$$

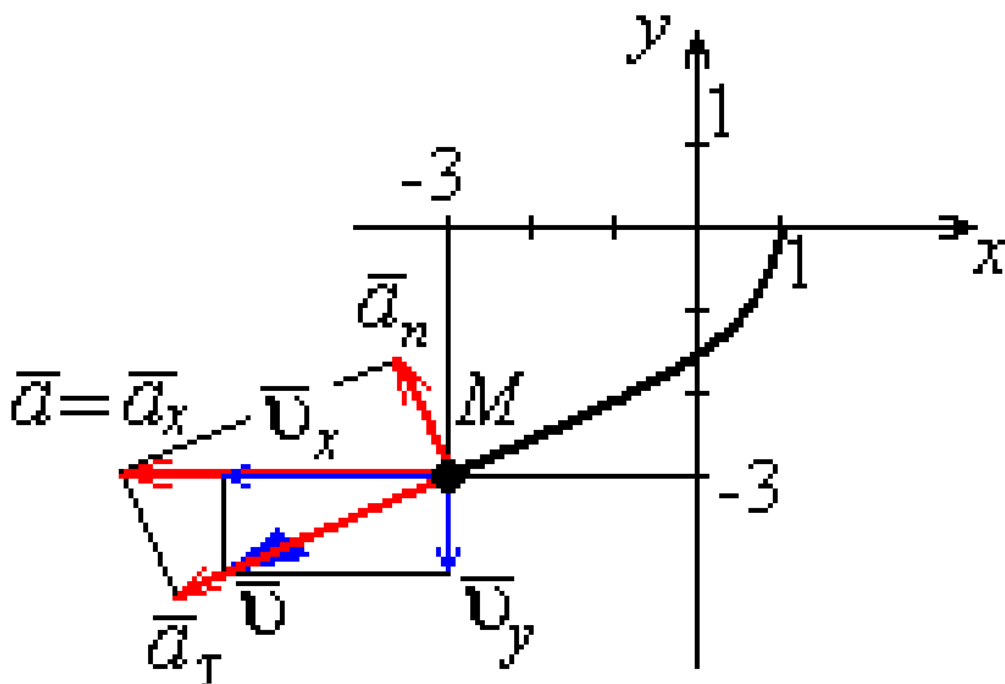
при  $t = t_1 = 1$  с:  $a_{\tau 1} = \frac{v_{x1} a_{x1} + v_{y1} a_{y1}}{v_1} = \frac{(-8) \cdot (-8) + (-3) \cdot 0}{8,544} = 7,49$  см/с<sup>2</sup>.

Модуль нормального ускорения точки найдем по формуле:  $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \Rightarrow$

при  $t = t_1 = 1$  с:  $a_{n1} = \sqrt{a_1^2 - a_{\tau 1}^2} = \sqrt{8^2 - 7,49^2} = 2,81$ .

Радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке определим из выражения  $\rho = \frac{v^2}{a_n}$ , то есть при  $t = t_1 = 1$  с:  $\rho_1 = \frac{v_1^2}{a_{n1}} = \frac{8,544^2}{2,81} = 26$  см.

На рисунке показано положение точки  $M$  в заданный момент времени. Вектор  $\vec{v}$  строим по составляющим  $\vec{v}_x$  и  $\vec{v}_y$ , причем этот вектор совпадает по направлению с касательной к траектории точки. Вектор  $\vec{a}$  строим параллельно оси  $x$  в сторону уменьшения координаты  $x$  (так как в нашем случае полное ускорение  $\vec{a}$  совпадает с составляющей  $\vec{a}_x$ ), а затем раскладываем на составляющие  $\vec{a}_n$  (перпендикулярно касательной к траектории точки) и  $\vec{a}_\tau$  (вдоль касательной к траектории точки). По направлению скорости  $\vec{v}$  и касательное ускорение  $\vec{a}_\tau$  совпадают, значит в данный момент времени движение ускоренное.



Результаты вычисления для заданного момента времени  $t_1 = 1$  с:

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с <sup>2</sup>					Радиус кривизны, см
$x$	$y$	$v_x$	$v_y$	$v$	$a_x$	$a_y$	$a$	$a_\tau$	$a_n$	$\rho$
-3	-3	-8	-3	8,544	-8	0	8	7,49	2,81	26